

Матрицалар және оларға қолданылатын амалдар.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ екі матрица қарастырайық.

$\Delta = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta = \Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$ – бұлар анықтауыштар.

Кері матрица

A матрицасының кері матрицасы $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

B матрицасының кері матрицасы B^{-1} .

$B^{-1} = \frac{1}{\Delta_B} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$, мұндағы $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ – алгебралық толықтауыш.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, B_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Матрицаларға қолданылатын амалдар

$C = A \pm B, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} = a_{11} \pm b_{11} & c_{12} = a_{12} \pm b_{12} \\ c_{21} = a_{21} \pm b_{21} & c_{22} = a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$.

Мысал келтірейік. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицалар берілген. (1)

1) $C = A + B = ?, C = \begin{pmatrix} c_{11} = 2 - 4 & c_{12} = -3 + 2 \\ c_{21} = 1 - 2 & c_{22} = 4 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

2) $C = A - B = ?, C = \begin{pmatrix} c_{11} = 2 + 4 & c_{12} = -3 - 2 \\ c_{21} = 1 + 2 & c_{22} = 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын A^{-1} табу керек, яғни $A^{-1} = ?$

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = ?$ Ол үшін $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = ?$

$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 1 = -1;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot (-3) = 3; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot 2 = 2;$

$A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}, A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – бірлік матрица.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – бірлік матрица.

Табылған кері матрицаның дұрыстығын тексерейік.

$A \cdot A^{-1} = E$ – болу керек,

Матрицаларды көбейту амалы

$A^{(n \times m)}$ – n – қатары, m – бағанасы; $B^{(m \times p)}$ – m – қатары, p – бағанасы.

Екі матрицаның көбейтсек, онда ол көбейтінді үшінші бір C матрицасын береді.

$A^{(n \times m)} \cdot B^{(m \times p)} = C^{(n \times p)}$ мұндағы $(n \times m)$, $(m \times p)$, $(n \times p)$ – өлшемдері.

$$C = (c_{ij}); c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Мысал келтірейік. (1) мысалдағы A және B матрицалары берілсін.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{(2 \times 2)} \cdot B^{(2 \times 2)} = C^{(2 \times 2)} = ?$$

$$C^{(2 \times 2)} = (c_{ij}); c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = ?$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{kj} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) = -8 + 6 = -2;$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{kj} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = 4 - 15 = -11;$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{kj} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot (-2) = -4 - 8 = -12;$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^2 a_{2k} \cdot b_{kj} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 2 + 20 = 22;$$

$$C^{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -11 \\ -12 & 22 \end{pmatrix}$$

Санды матрицаға көбейту

$$\text{Егер } k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix}, k - \text{const.}$$

3-мысалда A матрицасының кері матрицасын таптық, яғни $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, табылған

A^{-1} матрицаның дұрыстығын тексерейік, ол үшін $A \cdot A^{-1} = E$ теңдігі орындалу керек.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = E = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = ? \quad a_{ij}^{-1} = b_{ij}$$

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot (a_{kj}^{-1});$$

$$e_{11} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{kj} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-1) = 11;$$

$$e_{12} = \sum_{k=1}^2 a_{1k} \cdot b_{kj} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 0;$$

$$e_{21} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 0;$$

$$e_{22} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 11; \text{ сонымен,}$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ демек кері матрица дұрыс табылған.}$$

Мысалдар

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ берілген.

Табу керек $A + B = ?$, $2A = ?$, $A - 3B = ?$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 2A = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 18 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}, A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -21 \\ 0 & 3 \\ 18 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 29 \\ 0 & 6 \\ -25 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } A^{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B^{(3 \times 2)} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$A \cdot B = ?$, $A \cdot B \neq B \cdot A$;

$$A \cdot B = C^{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = ? \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^2 a_{ik} \cdot b_{kj};$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 3;$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{11} \cdot b_{21} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 11;$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 2;$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 17;$$

$$\text{Сонымен, } C = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Үйге тапсырма

1) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}; A \cdot B = ?$, $B \cdot A = ?$

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, A^{-1} = ?$, $A \cdot A^{-1} = ?$

$$3) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad A \cdot (B \cdot C) = ?; \quad (A \cdot B) \cdot C = ?$$